### Лабораторная работа № 1

Генерация случайных чисел

Цель работы: изучить методы получения случайных чисел, распределенных по различным законам.

**Содержание работы**

I. **Получить датчик случайных чисел, распределенных по заданному закону.**

1. Для выбранной среды программирования ознакомиться с функциями, предназначенными для получения случайных чисел, распределенных по равномерному закону в интервале [0,1]. Например, в языке Паскаль с этой целью используются процедура *Randomize* и функция *Random.*

2. Выбрать функцию плотности вероятности , согласно требованиям: функция должна быть неотрицательна и удовлетворять равенству

3. Вывести уравнение для вычисления случайной величины по заданному закону.

4. Подобрать метод для решения полученного уравнения.

5. Написать программу, которая получает выборку объемом *N*в , статистическое распределение выборки отображает в виде гистограммы относительных частот, график функции плотности вероятности выводит в одной системе координат с гистограммой.

6. Экспериментально подобрать такое значение *N*в при котором график функции плотности вероятности будет наиболее «точно накладываться» на гистограмму относительных частот.

II. **Получить датчик случайных чисел, распределенных по нормальному (гауссовскому) закону**.

1. Вычислить математическое ожидание и дисперсию гауссовской случайной величины, полученной при сложении *N* случайных величин, распределенных по равномерному закону.

2. Используя полученные значения вывести формулу для получения гауссовской случайной величины с требуемыми характеристиками σ и *m* (Табл. 1).

3. Написать программу, которая получает выборку объемом *N*в , статистическое распределение выборки отображает в виде гистограммы относительных частот.

*Таблица 1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар | σ | *m* | *N* | № вар | σ | *m* | *N* |
| 1 | 2 | 0 | 7 | 11 | 4 | 11 | 21 |
| 2 | 2 | 5 | 10 | 12 | 3.5 | 9 | 17 |
| 3 | 1 | 0.5 | 8 | 13 | 2 | 8.2 | 18 |
| 4 | 0.8 | 3 | 9 | 14 | 1.2 | 3.8 | 20 |
| 5 | 1.2 | 4 | 12 | 15 | 5 | 0 | 19 |
| 6 | 3 | 2 | 15 | 16 | 1 | 5 | 22 |
| 7 | 0.5 | 6 | 11 | 17 | 1.5 | 3 | 25 |
| 8 | 1.8 | 3 | 13 | 18 | 3 | 9 | 23 |
| 9 | 5 | 7 | 16 | 19 | 4 | 7 | 26 |
| 10 | 6 | 12 | 14 | 20 | 2.1 | 6 | 24 |

**Теоретические сведения**

*Выборочной совокупностью (выборкой)* называют совокупность случайно отобранных объектов.

**про гистограммы??**

Для получения случайных чисел, используемых при моделировании на ЭВМ, применяют датчики случайных чисел, причем вначале получают случайное число, распределенное по равномерному закону в интервале [0,1], а затем, используя его, случайную величину, имеющую заданный закон.

Для получения реализации равномерно распределенной случайной величины применяют два принципа: физический и алгоритмический.

Физический основан на использовании случайных физических явлений, например, потоков частиц, испускаемых радиоактивным веществом, собственных шумов радиоламп. Чувствительный элемент воспринимает сигнал, принимающий значения 1 или 0 в зависимости от уровня шума. Получив ряд случайных двоичных величин, вычисляют значение десятичной случайной величины *V* по формуле

Предельные значения данной случайной величины V равны 0 и 1. Действительно, если все =0, то V=0. Если =1, то имеем геометрическую прогрессию

Для которой

Доказано, что если вероятность появления 1и 0 одинакова, то случайная величина *V* распределена по равномерному закону. Такой датчик случайных чисел генерирует неповторяющуюся случайную последовательность.

При алгоритмическом способе случайные числа получают путем выполнения операций над числами. Строго говоря, такие числа не являются случайными, т.к. при каждом новом обращении при решении задачи они дают ту же случайную последовательность, что и в предыдущем обращении. Поэтому их называют псевдослучайными. Самый первый алгоритм получения псевдослучайных чисел предложен Нейманом. Алгоритм состоит в следующем: берут произвольное число, допустим

,

возводят в квадрат

,

отбрасывая две крайние цифры слева и справа, получают случайное число опять возводят в квадрат .

Получаем

и отбрасывают крайние две цифры. Получают новое случайное число

и т. д.

Удобства этого способа:

1. На получение числа затрачивается несколько простых операций, поэтому скорость нахождения псевдослучайных чисел имеет тот же порядок, что и быстродействие ЭВМ.
2. Программа для вычисления занимает очень мало места.
3. Используемую программу для получения псевдослучайных чисел достаточно проверить один раз на соответствие требуемому закону, и потом ею можно пользоваться сколько угодно раз.

Рассмотрим датчик случайных чисел, распределенных по равномерному закону, использующий другой, более удобный в программировании алгоритм. Он следующий: сначала задают два иррациональных числа

*А*=3,14159265 , *В*=0,542101887.

и находят сумму

.

Если , то , если , то *S*=.

Случайное число вычисляем по формуле

.

Изменяем значения *А* и *В* на новые: *А*=*В*, *В*=*S.* Эти переменные *А* и *В* запоминаются и при следующем обращении к датчику случайных чисел используют уже эти новые значения *А* и *В*.

Таким образом, при использовании датчика случайных чисел необходимо задать вначале перед первым обращением указанные значения переменным *А* и *В*. Новые значения эти переменные получат в подпрограмме.

Теперь рассмотрим, как, имея случайную величину *V*, распределенную по равномерному закону на интервале [0,1], получить случайную ξ, имеющую требуемую плотность вероятности на интервале [a,b].

Докажем, что ξ надо находить из уравнения

т.е., получив очередное значение *V* надо решить записанное выше уравнение. вычисленное **ξ** и будет случайной величиной, распределенной по требуемому закону. Для доказательства необходимо показать, что

для любого интервала

Вспомним, что интеграл

есть функция распределения, обладающая свойствами и, кроме того, монотонно возрастающая на интервале [*a,b*] (рис. 4).



Рис. 4. Функции распределения случайных величин

Аналогично имеем и для закона распределения равномерной случайной величины *V*:

.

Поэтому любая прямая *F*=*V* пересекает в одной точке, аб- сцисса которой ξ и является требуемой случайной величиной (рис. 4).

Выберем произвольный интервал [] , содержащийся в [*a,b*]. Точкам этого интервала соответствуют точки интервала оси *F,* удовлетворяющие неравенству

Поэтому, если **ξ** принадлежит интервалу [], то *V* принадлежит интервалу [] и наоборот (см. рис.4).

Значит,

.

Так как *V* равномерно распределена на [0,1] и функция распределения есть прямая линия, проходящая через начало координат под углом , абсциссы и ординаты точек которой равны, то

.

Таким образом, получили требуемую зависимость

,

свидетельствующую о том, что функцией плотности вероятности случайной величины является , что и следовало доказать.

Рассмотренный способ позволяет получать случайные числа, распределенные по любому закону, имея датчик равномерно распределенных чисел в интервале [0,1].

Как уже говорилось, наиболее часто используют в расчетах нормальный закон распределения. Соответствующие ему случайные числа можно получить рассмотренным способом. Однако на практике с целью сокращения объема вычислений используют другой способ, основанный на центральной предельной теореме. Она гласит, что при сложении достаточно большого числа случайных величин, распределенных по любому закону, получается случайная величина, распределенная примерно по нормальному (гауссовскому) закону. Исследования показали, что при сложении уже шести случайных величин, распределенных по равномерному закону, получается случайная величина, которую можно считать распределенной по нормальному закону. Поэтому в подпрограмме датчика нормально распределенных случайных величин используется вычисление шести равномерно распределенных случайных величин величин.

Покажем, как получить гауссовскую случайную величину с и .

Пусть − независимые равномерно распределенные на интервале [0,1] случайные величины. Тогда

Так как то =3.

Найдем величину дисперсии для :

.

Так как случайные величины и некоррелированы, то

и получаем

.

Мы получили, что случайная величина смещена на 3 и имеет

.

Для того, что получить случайную величину с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, пронормируем , т.е. перейдем к новой величине

.

Для получения случайной величины *W* с математическим ожиданием α и дисперсией необходимо умножить на и прибавить α:

В подпрограмме датчика случайных чисел, распределенных по нормальному закону, необходимо перед первым обращением также задать значения переменных

*А*=3,14159265, *В*=0,542101887

и, кроме того, при обращении задавать значение дисперсии требуемой случайной величины.

**Контрольные вопросы**

1. Что из себя представляет график функции плотности равномерного закона распределения случайных величин?
2. Что из себя представляет график функции распределения равномерного закона распределения случайных величин?
3. Что из себя представляет график функции плотности нормального закона распределения случайных величин?
4. Что из себя представляет график функции распределения нормального закона распределения случайных величин?
5. Какая связь между функцией плотности и функцией распределения случайных непрерывных величин?
6. Назначение гистограммы. Типы гистограмм.
7. Способы получения случайных величин.
8. Докажите равенство

### Лабораторная работа №2

Аппроксимация функций по данным измерений методом наименьших квадратов с весовыми коэффициентами

Цель работы: изучить методы аппроксимации при наличии ошибок в измерениях функции.

Содержание работы

Производится измерение значений функции в некоторые заданные моменты времени. Вследствие погрешностей измерительной техники замер аппроксимирующего полинома методом наименьших квадратов и с помощью этого полинома найти интерполяционное значение функции для и . Сравнить эти значения с точными значениями функции в этих точках. Вычислить дисперсию интерполированных значений функции.

Расчетные значения моментов измерений

Число полиномов .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Точное значение  функции | Аппроксимирующий  полином | Число функций К | измерения функции Y |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 |  |  | 4 | 0,5 |
| 2 |  |  | 5 | 0,4 |
| 3 |  |  | 4 | 0,5 |
| 4 |  |  | 3 | 2 |
| 5 |  |  | 5 | 0,2 |
| 6 |  |  | 6 | 0,5 |
| 7 |  |  | 3 | 0,1 |
| 8 |  |  | 4 | 0,5 |
| 9 |  |  | 5 | 2 |
| 10 |  |  | 5 | 4 |
| 11 |  |  | 4 | 2 |
| 12 |  |  | 3 | 3 |
| 13 |  |  | 5 | 2 |
| 14 |  |  | 5 | 0,5 |
| 15 |  |  | 5 | 0,5 |
| 16 |  |  | 5 | 3 |
| 17 |  |  | 4 | 5 |
| 18 |  |  | 4 | 2 |
| 19 |  |  | 5 | 2 |
| 20 |  |  | 5 | 3 |
| 21 |  |  | 4 | 0,8 |
| 22 |  |  | 6 | 0,5 |
| 23 |  |  | 4 | 0,4 |
| 24 |  |  | 4 | 3 |
| 25 |  |  | 3 | 2 |

### Лабораторная работа №3

Метод максимального правдоподобия

Цель работы: исследовать точность оценки неизвестных параметров системы, по данным измерений, методом максимального правдоподобия (ММП).

Содержание работы

Исследуемый процесс определяется системой дифференциальных уравнений:

В процессе исследования с помощью аппаратных средств в моменты времени , (где *N ‒* число измерений) производятся замеры функции *R*, зависящей от переменных этой системы:

.

Измерения производятся со случайной ошибкой *V*, распределенной по нормальному закону. Параметры закона распределения известны. По этим измерениям необходимо оценить известные параметры процесса. Неизвестными параметрами, вектор , могут быть начальные условия для системы уравнений, описывающих процесс, коэффициенты системы уравнений.

Для оценки неизвестных параметров воспользуемся методом максимального правдоподобия. Разность вектора измерений и его математической модели *S*(), вычисленной для некоторого значения вектора

,

является вектором случайных величин, распределенным по нормальному закону:

,

где корреляционная матрица, определяющая взаимосвязь погрешностей измерений .

Нам необходимо найти такое значение вектора , чтобы отклонение измеренного вектора от вычисленного имело максимальную плотность вероятности . Максимум этой функции достигается при минимуме выражения

.

Воспользовавшись условием нахождения минимума, получаем систему уравнений для вычисления  *k* компонентов вектора оценки .

.

Это уравнение называется уравнением правдоподобия. Для решения данной системы уравнений наиболее часто используют метод Ньютона, основанный на линеаризации функции . Для этого разложим относительно заданного значения в ряд Тейлора с учетом линейных членов разложения:

где *М* − матрица первых производных, вычисленная при .

Подставим эту зависимость в уравнение правдоподобия

или

*,*

где .

Отсюда

.

Мы получили формулу для вычисления величины подшагивания при нахождении вектора оценки определяемых параметров . Вычислив первое , определяем

и вычисляем новые значения матрицы производных M при , новое значение вектора и новое значение подшагивания . Вычисления осуществляют до тех пор, пока величина невязки (т.е. модуль разности правой и левой части уравнений) не станет меньше заданной. Полученное значение и является требуемой оценкой определяемых параметров.

Расчетный алгоритм этой задачи имеет вид:

1. Задаем начальные значения вектора оцениваемых параметров (конкретный вариант табл. 2-4)

*.*

1. Интегрируем систему дифференциальных уравнений исследуемого процесса и в заданные моменты времени запоминаем значения функции *S*.
2. Для нахождения величины подшагивания (j=1,2,...),

где

,

выполняем следующее:

а) вычисляем обратную матрицу :

б) вычисляем матрицу *M ‒* матрицу частных производных

(*k*=1, 2), (*j*=1, 2, …) методом конечных разностей. Для этого проводим два интегрирования системы дифференциальных уравнений при

,

,

где − величина вариации оцениваемых параметров равная 0.0001. Получаем значение функции и *(i*=1,2,…,*N*). Проводим еще два интегрирования при

,

.

Снова получаем значение функции и . Используя полученные данные, вычисляем матрицу *M*:

в) вычисляем вектор

,

где *R ‒* вектор опытных значений, указанных в конкретном варианте задания; *S* − вектор вычисленных значений функции при

*;*

г) проводим транспонирование матрицы M;

д) используя полученные данные, вычисляем .

4. Повторяем пп.2, 3 с новыми значениями вектора :

до тех пор, пока .

Файл лаб. 3 – табл

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| п\п | Система дифференциальных уравнений. Измеряемая функция | Вектор измерений | Диагональные элементы корреляционной матрицы | Номера шагов измере-ний | Оцени-ваемые пара-метры | Область нахождения оцени-  ваемых параметров | Шаг интегрирования |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 |  | -4.0748217692  -4.9251244666  -5.3650596829  -5.5725335805  -5.6489380647  -5.6516106094  -5.6127701050  -5.5501597849  -5.4735004615  -5.3884929080 | 0.0000000017  0.0000000024  0.0000000029  0.0000000031  0.0000000032  0.0000000032  0.0000000032  0.0000000031  0.0000000030  0.0000000029 | 100  200  300  400  500  600  700  800  900  1000 |  |  | 0.001 |
| 2 |  | -11.7495747650  -10.1018619930  -9.5594405249  -10.0556423140  -11.4270280470  -13.5421068160  -16.3274040240  -19.7997862370  -24.0555391830  -35.6269992060 | 0.0000013802  0.0000010201  0.0000009138  0.0000010111  0.0000013056  0.0000018340  0.0000026681  0.0000039207  0.0000057890  0.0000126915 | 10  100  200  300  400  500  600  700  800  1000 |  |  | 0.001 |
| 3 |  | -27.9220160870  359.3016348300  -459.4081624400  -514.1890451900  -36.5725516200  663.8740197600  705.7564359000  -1075.2696504000  -1137.9352900000  70.8989419320 | 0.0000077943  0.0012914645  0.0021105077  0.0023437548  0.0000133736  0.0044070193  0.0049804057  0.0115632756  0.0129540557  0.0000502719 | 50  100  140  200  250  300  350  400  450  500 |  |  | 0.100 |
| 4 |  | 80.7939656790  90.3353597930  101.0154267000  112.8665768400  126.0397777400  140.7160628800  156.9895776700  181.4732639000  241.7694362600  320.4381486300 | 0.0002612477  0.0003266658  0.0004081843  0.0005096120  0.0006356205  0.0007919442  0.0009856250  0.0013170222  0.0023362625  0.0041080951 | 10  25  40  55  70  85  100  120  160  200 |  |  | 0.001 |
| 5 |  | 41.2728743040  56.1048725640  68.7285616580  84.0455322240  152.8506999100  227.2262627000  372.5819475600  744.7528256500  1222.8638945000  3301.8906979000 | 0.0000681748  0.0001260055  0.0001889537  0.0002825779  0.0009347974  0.0020650200  0.0055515425  0.0221815617  0.0597688751  0.4361917478 | 120  150  170  190  250  290  340  410  460  560 |  |  | 0.010 |
| 6 |  | 11.9904530160  9.5385595393  7.5325142243  6.0110233128  5.4145243566  4.9115614009  4.1320609419  3.7795822687  2.9179458611  2.5713853850 | 0.0000014361  0.0000009102  0.0000005674  0.0000003613  0.0000002932  0.0000002412  0.0000001707  0.0000001428  0.0000000651  0.0000000661 | 10  20  30  40  45  50  60  66  90  110 |  |  | 0.010 |
| 7 |  | 6.6602020974  7.5303301042  8.5136259220  9.6223224301  12.3523960080  23.9357822560  47.2793362890  94.3608708930  164.8474696900  250.7742617600 | 0.0000017753  0.0000022699  0.0000028994  0.0000037040  0.0000061050  0.0000229141  0.0000893949  0.0003560834  0.0010861340  0.0025160425 | 50  60  70  80  100  150  200  250  290  320 |  |  | 0.010 |
| 8 |  | -30.5479738350  -105.8865842600  -376.2695645700  -10341.87928  -20698.54108  -86224.05112  -381568.09527  -1808534.90230  -9210914.31600  -292048008.21000 | 0.0000093293  0.0001120773  0.0014157537  1.06948  4.28369  74.35039  1456.09289  32711.45700  848742.81750  852829995.59000 | 10  20  30  55  60  70  80  90  100  120 |  |  | 0.010 |
| 9 |  | 33.0796914810  36.6574020540  40.5459313710  54.1080189190  126.6756732200  184.6894164400  262.9206413900  367.2399026300  505.3233639100  923.1219125900 | 0.0000437943  0.0000537912  0.0000657621  0.0001171203  0.0006420503  0.0013642414  0.0027645180  0.0053934608  0.0102060477  0.0310933895 | 50  60  70  100  200  250  300  350  400  500 |  |  | 0.010 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | Система дифференциальных уравнений. Измеряемая функция | Вектор измерений | Диагональные элементы корреляционной матрицы | Номера шагов измерений | Оцени-ваемые пара-метры | Область нахожде-ния оцени-ваемых пара-метров | Шаг интегри-рования | Начальные условия |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 |  | -4.9524780939  -4.9592147583  -4.8382659170  -4.7143415063  -4.6160795046  -4.5385600543  -4.4746610820  -4.4199312164  -4.3719461985  -4.3296486945 | 0.0000000025  0.0000000025  0.0000000023  0.0000000022  0.0000000021  0.0000000021  0.0000000020  0.0000000020  0.0000000019  0.0000000019 | 100  200  300  400  500  600  700  800  900  1000 |  |  | 0.001 | 1  -5 |
| 11 |  | 3.3053048478  4.2887316983  5.0848093712  5.8159510245  6.5660985050  7.3373551333  8.0086798379  8.3365310650  7.8555089604  6.1914701949 | 0.0000001093  0.0000001840  0.0000002586  0.0000003383  0.0000004312  0.0000005383  0.0000006413  0.0000006949  0.0000006168  0.0000003834 | 100  200  300  400  500  600  700  800  900  1000 |  |  | 0.001 | 4  -2 |
| 12 |  | 11.6880469090  17.4911644910  24.2998007560  31.9507348720  39.6874369710  48.0178791430  57.1582080870  66.8684390790  77.0401421700  87.6413351340 | 0.0000013665  0.0000030606  0.0000059049  0.0000102091  0.0000157532  0.0000230559  0.0000326672  0.0000447091  0.0000593285  0.0000766182 | 50  100  150  200  250  300  350  400  450  500 |  |  | 0.010 | 6  2 |
| 13 |  | 34.0906665290  54.0850353140  74.1022651860  94.0945560050  114.0781074600  134.0958480300  154.0965624300  174.0915803300  194.1415331700  214.0345650800 | 0.0000465121  0.0001170961  0.0002196564  0.0003541913  0.0005206996  0.0007191805  0.0009496333  0.0012120578  0.0015064536  0.0018328203 | 100  200  300  400  500  600  700  800  900  1000 |  |  | 0.010 | 3  5 |
| 14 |  | -2.0392595851  -1.1367241424  -0.4062673689  0.4713970393  1.7572488234  3.7609209802  6.8970302897  11.7437260080  19.1146958130  30.1103363850 | 0.0000001663  0.0000000516  0.0000000066  0.0000000089  0.0000001236  0.0000005657  0.0000019024  0.0000055154  0.0000146034  0.0000362730 | 20  40  60  80  100  120  140  160  180  200 |  |  | 0.010 | -2  6 |
| 15 |  | 2.3543159537  5.1700693624  9.3318176846  12.5992995070  21.0441438590  30.3575284210  48.0316340790  54.1130958320  49.4788421480  55.6270454050 | 0.0000000022  0.0000000107  0.0000000348  0.0000000635  0.0000001771  0.0000003686  0.0000009228  0.0000011715  0.0000009792  0.0000012378 | 50  100  200  250  350  500  650  750  800  850 |  |  | 0.010 | 0  3 |
| 16 |  | 3.5492452985  9.4602352466  22.0307661470  47.6097900050  99.5472381440  204.9353772900  418.6814113800  852.1819309600  1731.4617827000  3514.5031705000 | 0.0000000050  0.0000000358  0.0000001941  0.0000009067  0.0000039640  0.0000167992  0.0000701162  0.0002904795  0.0011990897  0.0049407978 | 50  100  150  200  250  300  350  400  450  500 |  |  | 0.010 | 1  0 |
| 17 |  | -9.3342165877  -99.4169170240  -1567.237  -12044.961  -92354.122  -1395492.591  -7616872.450  -41575107.723  -318595444.130  -1238778010.800 | 0.0000008710  0.0000987999  0.025  1.451  85.281  19475.179  580227.542  17286730.675  1015429438.000  15344083214.000 | 60  120  200  260  320  400  450  500  560  600 |  |  | 0.010 | 2  1 |
| 18 |  | -6.2874428956  -7.7809450652  -13.5444680460  -14.9572757140  -20.5053117480  -23.1596482970  -26.8430925500  -28.9918285480  -31.5411655000  -32.675250030 | 0.0000003952  0.0000006052  0.0000018345  0.0000022371  0.0000042041  0.0000053640  0.0000072063  0.0000084062  0.0000099524  0.0000106756 | 80  100  180  200  260  320  380  420  480  520 |  |  | 0.010 | 0  0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | Система дифференциальных уравнений. Измеряемая функция | Вектор измерений | Диагональные элементы корреляционной матрицы | Номера шагов измерений | Оцени-ваемые пара-метры | Область нахожде-ния оцени-ваемых параметров | Шаг интег-ри-рования | Началь-ные условия |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 19 |  | 0.7023093469  0.3809585425  0.0334196131  -0.3431554825  -0.7517256398  -1.1954467000  -1.6781634714  -2.2039181665  -2.7767803310  -3.4032643629 | 0.0000000049  0.0000000015  0.0000000000  0.0000000012  0.0000000057  0.0000000143  0.0000000282  0.0000000486  0.0000000771  0.0000001158 | 100  200  300  400  500  600  700  800  900  1000 |  |  | 0.001 | 1 |
| 20 |  | 6.8040673502  7.7861167722  8.7120958916  9.5835403259  10.4560660290  11.4575096750  12.8592212780  15.1437042490  18.1455755330  20.5322993400 | 0.0000004631  0.0000006065  0.0000007590  0.0000009185  0.0000010934  0.0000013127  0.0000016534  0.0000022931  0.0000032913  0.0000042162 | 150  200  250  300  350  400  450  500  550  600 |  |  | 0.001 | 2 |
| 21 |  | -4.6232255343  -8.0660766354  -13.7164357770  -22.8094493190  -36.8461441370  -58.5299511660  -94.3255605760  -150.7682545000  -241.9464145900  -387.3018314900 | 0.0000000085  0.0000000260  0.0000000753  0.0000002081  0.0000005430  0.0000013703  0.0000035590  0.0000090926  0.0000234171  0.0000599998 | 20  40  60  80  100  120  140  160  180  200 |  |  | 0.010 | 1 |
| 22 |  | 9.2548909385  10.6958000720  11.6612823010  13.2444811410  14.1967956350  16.2634831390  18.5351109750  21.0183183130  23.7373971690  26.6937405910 | 0.0000034280  0.0000045795  0.0000054397  0.0000070174  0.0000080642  0.0000105787  0.0000137392  0.0000176670  0.0000225209  0.0000285083 | 100  200  260  350  400  500  600  700  800  900 |  |  | 0.001 | 6 |
| 23 |  | 19.8467358720  18.8661176220  18.1162252720  17.6051779840  17.3398867760  17.3108313280  17.4063785570  17.8371733250  18.5353998100  18.9491135310 | 0.0000157642  0.0000142480  0.0000131285  0.0000123991  0.0000120303  0.0000119854  0.0000121168  0.0000127239  0.0000137317  0.0000143658 | 150  300  450  600  750  900  1000  1200  1400  1500 |  |  | 0.001 | -3 |
| 24 |  | -11.3381557370  -6.9837718146  1.9871723187  11.9154488730  18.0462669980  16.0922342220  11.6998268410  5.3135984704  -2.4135231937  -10.6537636700 | 0.0000051394  0.0000019494  0.0000001580  0.0000056798  0.0000130304  0.0000103571  0.0000054743  0.0000011291  0.0000002332  0.0000045391 | 200  400  600  800  1000  1200  1300  1400  1500  1600 |  |  | 0.001 | -2 |
| 25 |  | -10.2722644530  -10.4143903720  -10.6491595290  -10.9052830200  -11.3695949630  -11.7697236040  -12.4138576510  -12.7547907760  -13.8516366470  -15.2054656310 | 0.0000000422  0.0000000434  0.0000000454  0.0000000476  0.0000000517  0.0000000554  0.0000000616  0.0000000651  0.0000000768  0.0000000925 | 50  70  100  130  180  220  280  310  400  500 |  |  | 0.001 | -1 |
| 26 |  | 2.0872408965  2.5762446955  3.4913607074  3.9822336075  5.1400800110  6.0470346421  6.6203684868  7.4038262828  7.5862303915  8.2211728838 | 0.0000000436  0.0000000664  0.0000001219  0.0000001586  0.0000002642  0.0000003656  0.0000004382  0.0000005481  0.0000005753  0.0000006759 | 10  15  25  30  45  59  67  80  85  96 |  |  | 0.010 | 4 |
| 27 |  | 9.6626084264  15.8600249150  27.3713668400  37.2947319240  43.1251588310  56.9114311220  65.0232827040  84.1668465120  108.0161762600  121.9629562500 | 0.0000037367  0.0000100692  0.0000299691  0.0000556421  0.0000744122  0.0001295407  0.0001690861  0.002833022  0.0004663333  0.0005951247 | 20  40  70  90  100  120  130  150  170  180 |  |  | 0.010 | 1 |

### Лабораторная работа №4

Регрессионный анализ

Цель работы: получить математическую модель процесса, заданного его значениями при разных значениях его двух аргументов. Числовые значения процесса измеряются со случайной ошибкой, распределенной по нормальному закону, математическое ожидание ошибки равно нулю, дисперсия неизвестна. Процесс описывается алгебраической зависимостью.

Содержание работы

Построить математическую модель процесса, описываемого алгебраической зависимостью *У = f(х1, х2).* В процессе эксперимента с помощью измерительных средств при разных значениях аргументов

х1i, х2i производились замеры значений процесса *Уi (i=1,2,…,12).* Кроме того, проводились десять измерений процесса *У* при постоянных значениях его двух аргументов *х1, х2.* Необходимо, на основании экспериментальных данных, найти вид функциональной зависимости, оценить дисперсию погрешности, с которой производится измерение процесса, оценить значения коэффициентов модели, их значимость, построить доверительные интервалы для коэффициентов модели.

Данная задача решается с использованием регрессионного анализа. На первом шаге исследований выбирают вид математической модели процесса исходя из его физической сущности. Представим его в виде

где ̶ оценки неизвестных коэффициентов; ̶ регрессоры, зависящие от двух аргументов *х1, х2*; к ̶ число регрессоров.На основании таблицы экспериментальных данных для координат *х1, х2* вычисляем матрицу



где ̶ значение *j* – го регрессора в *i* – ом эксперименте.

Методом наименьших квадратов оцениваем неизвестные коэффициенты уравнения модели

где У ̶ вектор значений исследуемого процесса, полученный в эксперименте.

На втором этапе построения модели проверяем значимость полученного уравнения регрессии

Для этого вычислим среднее арифметическое результатов эксперимента

и величины

,

,

где ̶ значение модели, полученное при наборе регрессоров, вычисленных для *i* – го эксперимента.

По этим значениям вычисляем оценки дисперсий

α

с целью выяснения, есть ли корреляция между реальным процессом и его математической моделью. Для этого вычисляем функцию Фишера

или

проверяя наличие корреляции как равенство дисперсий , .

Задаем уровень значимости α =т0,05. В таблице распределения Фишера с числом степеней свободы к-1 и 12-к находим критическое значение . Если *F* >, то коэффициент множественной корреляции *R* значим, в противном случае незначим и надо исследовать таким же образом другую модель . В случае значимости коэффициента *R* остается неясным вопрос, это самая хорошая модель, или может есть более лучшая. Выясняют это путем перебора и проведения таких расчетов для разных моделей и сравнивая полученные значения *Fi* и *Ri*. Берут математическую модель с большими значениями.

На третьем шаге проверяют значимость коэффициентов уравнения регрессии. Для этого оцениваем по результатам экспериментов (варианты 13 ̶ 22) дисперсию неизвестной погрешности , влияющей на эксперимент

Затем вычисляем корреляционную матрицу погрешностей оценки коэффициентов модели вследствие действия погрешностей при измерениях

.

Точное значение неизвестно, поэтому используем оценку этой дисперсии

Диагональный элемент *Кii* матрицы характеризует дисперсию оценки коэффициента модели. Обозначим

Вычисляем величину По таблице распределения Стьюдента для степеней свободы 9, уровня значимости 0,05 находим критическое значение *tα* . Если > *tα*, то коэффициент значим и его надо использовать в модели. В противном случае его в модели не учитывают и все расчеты проводят заново. Процедура выполняется до тех пор, пока все коэффициенты не станут значимыми.

На четвертом шаге вычисляют доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии. По таблице распределения Стьюдента для уровня значимости α = 0,05 и числа степеней свободы 9 находим *tгр* . Используя , *tгр* и диагональные элементы матрицы , обозначим их *Сii,* находим доверительный интервал, в котором с вероятностью Р = 1 ̶ α находится точное значение коэффициента

*tгр* ≤ ≤ *tгр*.

Результаты расчетов представить в виде таблицы, в которой представлены рассмотренные уравнения и их оцененные коэффициенты, а также соответствующие им *R, F.* Представить результаты расчета оценки дисперсии шума ε, доверительного интервала одного из оцененных коэффициентов.

Варианты заданий

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | N | y | x1 | x2 |
| 1 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 31,4568703  30,0460275  347,6837445  98,2613735  47,1486464  147,7972654  82,3652413  351,5217425  46,0615664  140,7141210  235,6222596  101,5574365  296,9009270  299,4606986  298,2639809  300,1278479  301,4911690  301,9117462  296,9911469  297,0211244  302,4813187  300,5858286 | 7,000  5,000  12,000  11,000  7,000  7,000  3,000  14,000  2,000  10,000  8,000  9,000  13,000 | 2,000  3,000  14,000  4,000  3,000  10,000  13,000  12,000  11,000  6,000  14,000  5,000  11,000 |
| 2 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 52,5858343  103,2263439  142,6952557  -0,7117417  178,2160326  176,7682463  85,3155488  241,4663536  176,0593255  106,3241448  179,4904154  100,4643501  101,9773298  104,4439300  103,2907708  105,0867961  106,4004946  106,8057635  102,0642658  102,0931522  107,3546045  105,5281071 | 11,000  6,000  8,000  4,000  12,000  13,000  11,000  13,000  13,000  5,000  13,000  11,000  5,000 | 4,000  12,000  13,000  0,000  12,000  11,000  6,000  15,000  11,000  12,000  11,000  7,000  13,000 |
| 3 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 1325,1623383  1296,8468778  1784,0326434  367,7407025  1993,3371129  1501,4386613  656,1759756  2881,6546788  636,1883183  414,7721612  2370,0797029  247,8226410  -2,4206067  5,4091768  1,7486780  7,4498410  11,6199432  12,9063972  -2,1446437  -2,0529491  14,6435953  8,8507041 | 12,000  12,000  13,000  6,000  15,000  13,000  8,000  17,000  8,000  6,000  15,000  4,000  0,000 | 7,000  6,000  16,000  6,000  6,000  5,000  8,000  16,000  7,000  7,000  18,000  13,000  8,000 |
| 4 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 88,3647155  38,9171776  214,6755189  41,2421623  122,1004938  50,8180019  91,4007504  337,5613222  174,0631677  154,9927891  244,7164725  188,6239540  159,8463314  162,4726812  161,2448375  163,1571826  164,5559629  164,9874791  159,9388978  159,9696550  165,5718658  163,6270751 | 12,000  8,000  11,000  10,000  8,000  12,000  6,000  16,000  13,000  13,000  11,000  10,000 | 4,00  2,000  14,000  1,000  10,000  1,000  9,000  16,000  9,000  7,000  16,000  13,000  11,000 |
| 5 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 337,2582443  63,3701193  515,5767566  132,0114992  198,5223412  202,0669770  95,8270967  503,0365417  96,0823941  183,3386634  410,8476550  231,4226067  146,1908194  149,6165511  148,0149887  150,5093942  152,3339211  152,8967778  146,3115603  146,3516791  153,6590343  151,1223078 | 13,000  3,000  12,000  2,000  12,000  11,000  5,000  17,000  4,000  11,000  9,000  4,000  1,000 | 11,000  7,000  18,000  11,000  3,000  6,000  7,000  12,000  8,000  2,000  17,000  14,000  12,000 |
| 6 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 434,6056050  99,4576048  426,5185028  219,8754453  261,1813246  113,2138322  293,0785722  811,3168444  325,0937345  209,3121888  506,5148699  140,8936827  185,8041733  189,7014111  187,8794151  190,7171421  192,7927908  193,4331172  185,9415325  185,9871731  194,3002881  191,4144151 | 8,000  7,000  9,000  5,000  8,000  4,000  5,000  10,000  6,000  4,000  5,000  4,000  5,000 | 12,000  4,000  11,000  9,000  8,000  6,000  11,000  17,000  11,000  9,000  16,000  7,000  8,000 |
| 7 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 276,6234933  63,8808072  324,6093583  69,0876417  70,7131909  217,9847897  273,6863587  488,8796705  80,0760474  164,2341817  428,4742487  72,1589693  142,4072056  145,5690592  144,0908624  146,3931282  148,0771151  148,5966160  142,5186460  142,5556745  149,3001572  146,9588302 | 10,000  6,000  5,000  6,000  8,000  6,000  4,000  11,000  4,000  5,000  8,000  3,000  3,000 | 11,000  4,000  15,000  4,000  3,000  11,000  14,000  16,000  6,000  9,000  16,000  6,000  10,000 |
| 8 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 43,4908548  135,6953533  297,5975191  115,0599909  199,6438847  143,0146356  189,7374671  553,9366375  282,0783522  91,6352690  384,6093494  249,2547080  15,3286260  18,5863057  17,0633092  19,4353497  21,1703730  21,7056183  15,4434438  15,4815946  22,4304817  20,0181963 | 9,000  3,000  9,000  5,000  9,000  3,000  5,000  12,000  3,000  5,000  7,000  5,000  5,000 | 3,000  10,000  13,000  8,000  10,000  10,000  11,000  18,000  15,000  6,000  16,000  13,000  1,000 |
| 9 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 383,9852410  787,7938352  1671,2846123  13,3291853  583,8121339  32,8034594  115,0882527  2125,4422674  772,1392667  527,2359452  883,1937554  572,7850655  182,2517787  188,0421263  185,3350833  189,5512556  192,6351647  193,5865340  182,4558612  182,5236720  194,8749390  190,5872336 | 7,000  5,000  7,000  2,000  11,000  3,000  3,000  9,000  3,000  7,000  4,000  5,000  4,000 | 7,000  12,000  15,000  1,000  7,000  2,000  5,000  15,000  15,000  8,000  14,000  15,000  6,000 |
| 10 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 66,7154726  11,2039852  47,8853446  -13,2677819  92,3288097  2,2890409  -23,5050450  77,5516930  -16,9776797  -10,1156990  -2,6867848  -11,0728261  -0,7609986  0,1670218  -0,2668366  0,4088904  0,9031493  1,0556254  -0,7282903  -0,7174222  1,2621184  0,5749268 | 9,000  6,000  9,000  2,000  10,000  3,000  3,000  10,000  2,000  3,000  5,000  3,000  3,000 | 5,000  10,000  15,000  7,000  2,000  2,000  15,000  10,000  9,000  10,000  13,000  9,000  3,000 |
| 11 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 96,5791595  102,2170112  169,6946599  14,2868668  98,2125449  35,7697483  101,3181207  425,4692204  72,0594415  181,3443289  169,4972393  81,4691680  8,9733754  11,4447979  10,2893842  12,0889209  13,4051877  13,8112489  9,0604814  9,0894243  14,3611629  12,5310946 | 8,000  33,000  9,000  4,000  8,000  3,000  4,000  10,000  2,000  7,000  5,000  4,000  3,000 | 5,000  8,000  7,000  2,000  5,000  4,000  7,000  13,000  7,000  8,000  9,000  6,000  2,000 |
| 12 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 16.7578724  68.6705038  520.5320940  28.9071881  381.2608873  365.1795694  318.0199004  891.2514470  454.0910887  27.8517452  493.3592018  61.7837759  84.8943817  88.6816124  86.9110458  89.6686724  91.6857318  92.3079838  85.0278638  85.0722161  93.1506771  90.3462635 | 7.000  6.000  5.000  3.000  10.000  4.000  1.000  9.000  3.000  4.000  8.000  2.000  3.000 | 3.000  5.000  12.000  3.000  11.000  10.000  9.000  16.000  11.000  2.000  12.000  4.000  5.000 |
| 13 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 443.7788251  70.3016086  754.4447054  58.7030888  859.7493162  396.3998719  137.3971476  1118.6719390  360.1081009  297.8123002  381.3601145  227.4904537  -20.6856398  -16.1910861  -18.2923330  -15.0196776  -12.6259016  -11.8874346  -20.5272279  -20.4745922  -10.8873555  -14.2155361 | 9.000  4.000  9.000  2.000  9.000  6.000  3.000  10.000  6.000  5.000  5.000  4.000  1.000 | 3.000  1.000  8.000  4.000  10.000  7.000  6.000  12.000  6.000  6.000  10.000  7.000  10.000 |
| 14 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 214.4807484  139.6812226  371.5966170  107.0578841  298.6386039  197.0169097  218.7413613  472.9409782  52.0785278  182.6658300  313.6201816  79.2620028  46.3226386  49.5876198  48.0612098  50.4385667  52.1774788  52.7139238  46.4377138  46.4759500  53.4404118  51.0227197 | 7.000  6.000  8.000  6.000  11.000  6.000  3.000  11.000  2.000  7.000  7.000  4.000  5.000 | 10.000  10.000  14.000  6.000  9.000  10.000  13.000  14.000  6.000  8.000  13.000  6.000  3.000 |
| 15 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 673.1261644  48.3890642  799.3864497  20.5670304  836.4082884  409.5467319  226.6486313  1594.9522509  608.1194417  220.7858904  715.0273513  78.9615452  27.9277013  32.8927767  30.5720889  34.1880772  36.8329832  37.6489224  28.1027321  28.1608898  38.7539194  35.0765808 | 7.000  5.000  6.000  2.000  8.000  5.000  3.000  11.000  5.000  3.000  5.000  1.000  3.000 | 8.000  1.000  12.000  1.000  8.000  8.000  9.000  9.000  12.000  8.000  14.000  11.000  1.000 |
| 16 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 385.8434251  58.7901228  246.5397303  148.9250230  622.3055902  307.1603185  167.9869352  897.2147028  115.0896021  169.5930412  329.2717385  61.7220238  27.9450661  31.6704883  29.9288178  32.6414393  34.6255799  35.2376765  28.0763697  28.1199982  36.0666169  33.3079719 | 8.000  3.000  6.000  5.000  10.000  7.000  5.000  12.000  4.000  5.000  7.000  3.000  2.000 | 2.000  7.000  15.000  0.000  10.000  5.000  8.000  12.000  10.000  2.000  14.000  3.000  5.000 |
| 17 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 189.7135483  677.0067214  1137.6173965  208.1064152  209.7602464  202.9645257  237.6516586  1149.8409927  560.1744826  284.9618629  908.3821824  286.0939675  65.4605573  68.5573498  67.1095696  69.3644619  71.0137975  71.5226087  65.5697047  65.6059712  72.2116732  69.9185235 | 10.000  7.000  9.000  5.000  8.000  6.000  4.000  8.000  4.000  4.000  6.000  3.000  1.000 | 1.000  10.000  13.000  4.000  2.000  3.000  6.000  15.000  15.000  7.000  16.000  10.000  7.000 |
| 18 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 411.1978875  521.4893468  565.3928516  394.5819824  520.4457651  354.5305929  123.6209949  1309.9214465  699.1181954  314.5690058  457.9540263  429.9097756  223.9701926  228.8844508  226.5869880  230.1652463  232.7825547  233.5899803  224.1433971  224.2009480  234.6834475  231.0444791 | 7.000  6.000  7.000  4.000  8.000  7.000  1.000  10.000  6.000  7.000  8.000  5.000  2.000 | 9.000  11.000  11.000  10.000  10.000  8.000  6.000  17.000  13.000  7.000  9.000  10.000  8.000 |
| 19 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 33.5460954  22.9671635  26.8702262  22.6969085  30.2403068  22.3271537  27.5602196  -5.3755610  27.0252635  35.3964831  10.4863752  28.0494306  34.1386565  35.1890453  34.6979784  35.4628065  36.0222381  36.1948197  34.1756777  34.1879788  36.4285408  35.6507364 | 9.000  4.000  5.000  6.000  9.000  6.000  5.000  8.000  5.000  6.000  8.000  3.000  1.000 | 4.000  4.000  13.000  10.000  5.000  11.000  14.000  17.000  10.000  2.000  12.000  6.000  8.000 |
| 20 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 119.5356730  0.9525910  49.8692959  -7.3052642  104.2348609  17.3294989  15.5642355  92.6289154  24.0254446  43.4279995  -139.5029697  -34.9430465  -18.8675181  -17.8095996  -18.3041866  -17.5338759  -16.9704339  -16.7966152  -18.8302315  -18.8178422  -16.5612186  -17.3445988 | 10.000  4.000  6.000  3.000  11.000  3.000  5.000  9.000  5.000  5.000  4.000  4.000  3.000 | 7.000  9.000  8.000  8.000  4.000  2.000  10.000  13.000  9.000  4.000  17.000  12.000  9.000 |
| 21 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 84.5382572  46.5580131  71.7802678  7.4868073  96.7136919  69.5539347  32.9485605  111.0572965  66.0427759  69.4440995  64.5167217  82.7768898  62.5415782  64.3200903  63.4886189  64.7836212  65.7308476  66.0230618  62.6042623  62.6240905  66.4187969  65.1018231 | 9.000  6.000  7.000  2.000  10.000  3.000  1.000  12.000  4.000  4.000  5.000  1.000  3.000 | 5.000  3.000  14.000  0.000  7.000  11.000  4.000  12.000  11.000  10.000  10.000  11.000  10.000 |
| 22 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 31.2376876  602.5449950  391.3964041  188.5902794  458.4665615  115.5216372  226.6056591  1432.9043527  84.1175039  286.4486537  1716.9133374  96.8810476  545.9937716  550.8792758  548.5952558  552.1525771  554.7545714  555.5572725  546.1659626  546.2231768  556.6443417  553.0266654 | 6.000  7.000  6.000  4.000  10.000  5.000  2.000  12.000  2.000  3.000  7.000  2.000  3.000 | 1.000  9.000  7.000  5.000  6.000  3.000  7.000  13.000  11.000  7.000  18.000  4.000  11.000 |
| 23 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22 | 301.2438340  118.3499710  259.5754703  80.0084952  345.5148116  108.0702196  78.8326493  766.0427308  323.0826445  131.3822388  352.8623870  122.4330080  12.1822823  15.6184248  14.0119953  16.5139813  18.3440529  18.9086202  12.3033901  12.3436308  19.6731932  17.1287575 | 7.000  6.000  5.000  4.000  7.000  6.000  2.000  11.000  6.000  7.000  7.000  3.000  1.000 | 10.000  3.000  14.000  4.000  12.000  2.000  11.000  16.000  14.000  1.000  12.000  11.000  3.000 |

Контрольные вопросы

1.Что такое регрессионный анализ и какие задачи он решает?

2.Что такое уравнение регрессии, из каких элементов оно состоит?

3.Как оценивают коэффициенты уравнения регрессии?

4.Что такое регрессоры, как их задают?

5.Чем отличается регрессионный анализ от метода наименьших квадратов?

6.Что такое оценка коэффициентов уравнения регрессии?

7.Что такое уровень значимости, его связь с величиной вероятности?

8.Как подбирают уравнение регрессии?

9.Основные положения регрессионного анализа?

10.Что такое коэффициент детерминации, как его определяют?

11.Что такое число степеней свободы в математической статистике?

12.Что такое проверка значимости коэффициента уравнения регрессии, как это делается?

13.Для чего используется распределение Фишера при выборе уравнения регрессии?

14.Как оценить дисперсию случайной погрешности при построении уравнения регрессии по результатам эксперимента?

15.Для чего используется распределение Стьюдента в регрессионном анализе?

16.Как вычисляют доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии и зачем это нужно?

### Лабораторная работа №5

Метод максимума функции апостериорной вероятности (байесовские оценки)

*Цель работы:* исследование точности оценки неизвестных параметров системы по данным измерений методом максимальной апостериорной вероятности.

Содержание работы

Исследуемый процесс определяется системой дифференциальных уравнений:

В процессе исследования, с помощью аппаратных средств, в моменты времени (*i = 1, 2, …, N),* (где N –число измерений), производятся замеры функции , зависящей от переменных этой системы

.

Измерения производятся со случайной ошибкой V, распределенной по нормальному закону. По этим измерениям необходимо оценить неизвестные параметры процесса – вектор , компонентами которого являются начальные условия системы дифференциальных уравнений. Возможные значения оцениваемых параметров заданы математическим ожиданием и корреляционной матрицей .

Между случайными векторами и имеется статистическая связь – изменение ведет к изменению . Формула Байеса, задающая статистическую связь между и , записывается в виде:

где – функция, задающая плотность вероятности значения оценки неизвестных параметров при заданном векторе наблюдений ; – функция плотности вероятности вектора оцениваемых параметров; – априорная функция плотности вероятности вектора оцениваемых параметров; – функция плотности вектора наблюдений.

Необходимо найти такое значение , при котором функция будет максимальна, функция условной плотности вероятности оцениваемых параметров будет принимать наибольшее значение при максимальном значении произведения . Так как и распределены по нормальному закону, можно записать

где - вектор наблюдений, вычисленный с помощью математической модели; – корреляционные матрицы погрешностей, – математическое ожидание оцениваемых параметров.

Тогда

*где*

*J =*

Максимум достигается при минимуме значения *J.* Отсюда следует, что искомая оценка является решением системы уравнений:

или ,

или

Решение системы получаем, используя линеаризацию вектора .

Имеем:

.

Подставим линеаризованную зависимость в систему уравнений:

Отсюда можем получить выражение для вычисления очередного значения подшагивания при нахождении корней системы уравнения, являющихся оценками неизвестных параметров .

Расчетные алгоритм имеет вид:

1. Задаем начальные значения вектора оцениваемых параметров

=

1. Интегрируем систему дифференциальных уравнений исследуемого процесса и в заданные моменты времени запоминаем значения функции S.
2. Для нахождения величины подшагивания = , выполняем следующее:
3. По заданной матрице = находим матрицу , где – заданная в каждом варианте дисперсия погрешностей оцениваемых параметров;
4. По заданной корреляционной матрице погрешностей измерений = находим матрицу , где = 20;
5. Вычисляем матрицу частных производных методом конечных разностей. Величину вариации взять равной 0, 001;
6. Проводим транспонирование матрицы ;
7. Вычисляем
8. Повторяем пп. 2, 3 с новыми значениями вектора , где = + , до тех пор, пока .
9. Получили значение вектора .

Варианты заданий

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ вар** | **Система дифференци-альных**  **уравнений. Измеряемая функция** | **Вектор измерений** | **Диагональные элементы корреляционной матрицы** | **Номера шагов измере-ний** | **Оцени-ваемые пара-метры** | **Область нахожд. парам.** | **Шаг интег-рирования** | **Математическое ожидание и оцениваемых параметров** |
| 1 |  | 1.7300156098  1.1302275798  0.6958622864  0.5825885936  0.4118995280 | 0.1257081374  0.0573779835  0.0262601304  0.0120655327  0.0055725721 | 50  100  150  200  250 |  | -2  -4 | 0.001 | 0.0  -2.0  1.0 |
| 2 |  | -0.6803184650  -0.5834132881  -0.4621323312  -0.2000447655  -0.0293980225 | 0.0176516961  0.0122016608  0.0065597678  0.0018145327  0.0000430177 | 50  90  130  170  200 |  | -1  -3 | 0.001 | 1.0  1.0  1.0 |
| 3 |  | -1.3156913518  -1.3803058580  -1.5109880910  -1.2557031271  -1.2099326329 | 0.0660191556  0.0682994141  0.0701258025  0.0714964318  0.0728674782 | 100  150  190  220  250 |  | 1  -3 | 0.001 | 3.0  -1.0  1.0 |
| 4 |  | -6.5747029871  -6.6544124839  -7.0418553611  -5.6661411616  -5.2756657877 | 1.6485958475  1.5873977140  1.5231054147  1.4557446288  1.3853704183 | 50  100  150  200  250 |  | -2  0 | 0.001 | 0.0  2.0  1.0 |
| 5 |  | 6.8408424674  7.0167969320  6.4826286155  8.2333167802  8.8363830222 | 1.9655428999  2.2115221610  2.2790432319  2.4097511638  2.5646149762 | 70  240  290  300  350 |  | 1  -6 | 0.001 | 4.0  -2.0  1.0 |
| 6 |  | -8.0684332016  -8.3523135111  -8.7409930799  -7.1457842771  -6.5967912880 | 2.4827920190  2.5008053522  2.3468066704  2.3153157115  2.1660917446 | 80  240  290  300  350 |  | -7  0 | 0.002 | -5.0  3.0  1.0 |
| 7 |  | 12.4008305620  14.8980005690  15.9491992020  21.8317071030  24.9559942460 | 6.4589942117  9.9694098950  13.7952013700  16.9432976450  20.4561011530 | 40  100  150  190  230 |  | 4  -5 | 0.002 | 7.0  1.0  1.0 |
| 8 |  | -8.4969760418  -9.6526509691  -12.0966609030  -11.7379529110  -12.7321361890 | 2.7535357055  3.3401003933  4.4945557756  6.2473400004  8.0688921412 | 70  120  190  260  310 |  | 0  -9 | 0.001 | 3.0  -6.0  1.0 |
| 9 |  | 1.9265519270  1.8527042028  1.6683952446  2.0487185791  2.1204228584 | 0.1558923438  0.1541791521  0.1509552307  0.1492062996  0.1476787690 | 100  170  290  350  400 |  | -1  -2 | 0.001 | 1.0  0.0  1.0 |
| 10 |  | 0.6390755849  0.6142035498  0.5564501176  0.6822095944  0.7066307835 | 0.0171540946  0.0169448654  0.0167920128  0.0165446732  0.0164005425 | 30  70  100  150  180 |  | -2  -2 | 0.0021 | 0.0  1.0  1.0 |
| 11 |  | -2.3302951587  -2.4247529695  -2.6590744361  -2.2310835263  -2.1538874145 | 0.2071017606  0.2107663695  0.2171784608  0.2257054654  0.2309177709 | 90  120  160  200  220 |  | 0  -6 | 0.001 | 2.0  0.0  1.0 |
| 12 |  | -3.6655756670  -3.8452327435  -4.2523264989  -3.5917245590  -3.4469655026 | 0.5124438705  0.5300435801  0.5554039534  0.5849469285  0.5914053288 | 30  70  120  170  180 |  | 0  -6 | 0.001 | 3.0  0.0  1.0 |
| 13 |  | 2.0045858694  2.6036837202  2.9356242974  4.3950396353  5.1694523898 | 0.1667767724  0.3045018494  0.4673596634  0.6866701043  0.8777325187 | 70  105  140  180  210 |  | 1  -4 | 0.002 | 5.0  2.0  1.0 |
| 14 |  | 6.9924857822  6.7696816946  6.1680047820  7.6330255137  7.9445145386 | 2.0536504854  2.0584957627  2.0631921805  2.0711710924  2.0730407406 | 100  150  170  195  200 |  | 2  -2 | 0.002 | 9.0  1.0  1.0 |
| 15 |  | -5.2060118231  -4.4055173543  -4.2187982333  -2.7835394040  -1.7409399199 | 1.0336469444  0.6957611065  0.5466801087  0.3513218521  0.1508616756 | 50  90  110  140  180 |  | -5  -7 | 0.001 | -2.0  -2.0  1.0 |
| 16 |  | 0.8006185966  0.8361655520  0.8136810827  1.0507787826  1.1380459939 | 0.0269224572  0.0314049440  0.0359053131  0.0392504950  0.0425395349 | 150  190  230  260  290 |  | -2  -2 | 0.001 | 1.0  1.0  1.0 |
| 17 |  | 8.7786291466  8.2647631920  7.4768696378  9.2120573565  9.6064340185 | 3.2368066184  3.0681338925  3.0317256414  3.0167256404  3.0310808256 | 20  90  120  150  190 |  | 0  -2 | 0.002 | 1.0  0.0  1.0 |
| 18 |  | 1.8720817110  2.2418443544  2.3986194387  3.1724308821  3.4426777362 | 0.1472017420  0.2257482509  0.3120132071  0.3577724423  0.3892833696 | 60  120  180  210  230 |  | 0 | 0.002 | 2.0  2.0  1.0 |
| 19 |  | -4.5930204684  -4.9539676022  -5.4413649847  -4.5239326569  -4.3771208700 | 0.8045604622  0.8797770711  0.9094346066  0.9279886815  0.9536487375 | 110  180  205  220  240 |  | -2  2 | 0.001 | 0.0  5.0  1.0 |
| 20 |  | 5.5918847248  4.9608261086  4.0107041400  4.5193611291  4.5571141440 | 1.3133478520  1.1054051599  0.8723515403  0.7260669021  0.6821076531 | 100  130  170  200  210 |  | 3  -7 | 0.001 | 3.0  -4.0  1.0 |
| 21 |  | 1.8199300232  1.8984492041  1.8961674052  2.5196857744  2.7671351199 | 0.1391146051  0.1618868014  0.1949860912  0.2256915587  0.2514975981 | 30  70  120  160  190 |  | 1  -2 | 0.001 | 3.0  2.0  1.0 |
| 22 |  | -1.5395149640  -1.8204259767  -2.2017017191  -1.9925416018  -2.0098130708 | 0.0903919497  0.1187988846  0.1488924664  0.1800218464  0.2010586175 | 10  40  70  100  120 |  | -3  -2 | 0.001 | -1.0  0.0  1.0 |
| 23 |  | 42.0815067420  41.3568024550  38.0278595810  47.4365250440  50.2731843190 | 74.3782423350  76.8258521830  78.4249125020  79.9923181320  83.0129596150 | 40  70  90  110  150 |  | 0  1 | 0.001 | 3.0  7.0  1.0 |
| 24 |  | -20.0089361660  -18.7448822530  -18.4217798940  -13.4849677110  -10.5669722880 | 15.2689763490  12.5959737950  10.4236288470  8.2453716973  5.5579226239 | 60  100  130  160  200 |  | 3  -6 | 0.001 | 5.0  -4.0  1.0 |
| 25 |  | 0.4129728691  0.3622655635  0.2956782947  0.3229274402  0.2474682472 | 0.0071631887  0.0058947798  0.0047412098  0.0037070842  0.0020114631 | 30  60  90  120  180 |  | -1  0 | 0.001 | 1.0  2.0  1.0 |
| 26 |  | 1.1513619266  1.0574884177  0.9140254542  1.0186960446  1.0073133772 | 0.0556784423  0.0502301781  0.0453071621  0.0368902661  0.0333274674 | 70  90  110  150  170 |  | -3  3 | 0.001 | 0.0  6.0  1.0 |
| 27 | /5 | -0.3842099834  -0.4132911295  -0.4823347767  -0.4182485611  -0.4122306659 | 0.0058298810  0.0061232005  0.0071458329  0.0079319383  0.0084584727 | 100  120  160  190  210 |  | 1  -2 | 0.001 | 3.0  1.0  1.0 |

### Содержание отчета

1. Постановка задачи (конкретный вариант)
2. Расчетный алгоритм
3. Блок-схема программы
4. Текст программы
5. Результат выполнения программы
6. Краткие выводы по работе

Контрольные вопросы

1. Основные допущения, принимаемые при использовании ММАВ.
2. Формула Байеса для условных вероятностей (дискретный случай).
3. Формула Байеса для условных вероятностей (непрерывный случай).
4. Общий вид функции плотности вероятности оцениваемых параметров.
5. Метод нахождения максимума функции плотности вероятности оцениваемых параметров.
6. Общий вид априорной функции плотности вероятности.
7. Сравните ММП и ММАВ.

### Лабораторная работа №6

Дискретный фильтр Калмана

*Цель работы:* изучить алгоритм дискретного фильтра Калмана для оценки параметров системы при действии шумов.

Содержание работы

Математическая модель системы, поведение которой требуется изучить, линейна и имеет вид

+

где N – число измерений; – переменная, описывающая состояние системы в момент времени – элементы вектора перехода ;

– величина шума, воздействующего на систему в момент времени .

Математическая модель вектора измерений линейна и имеет вид

где – элементы вектора коэффициентов влияния ; - величина ошибки измерения в момент времени .

Тогда для оценки текущего значения , воспользуемся рекуррентными формулами фильтра Калмана:

где – оценка текущего значения в момент времени ; дисперсия шума в момент времени ; – дисперсия шума V в момент времени ; – дисперсия погрешности оценки , – дисперсия погрешности прогноза.

Расчетный алгоритм это задачи имеет вид:

1. Вычислить вектора и по заданным уравнениям (табл. 6).
2. Промоделировать поведение системы, описанной уравнением (1), при действии шумов, с заданным начальным условием (табл. 6). Для этого вычислить действительные значения Значения шумов в заданные моменты времени получить используя датчик случайных чисел с заданной дисперсией .
3. Вычислить вектор измерений по формуле (2). Значения ошибок получить с помощью датчика случайных чисел с заданной дисперсией .
4. Используя исходные данные , и вектор измерений вычислить по уравнениям дискретного фильтра Калмана требуемые значения .
5. Промоделировать поведение системы, описанной уравнением (1), без учета шумов с заданным начальным условием (табл. 6), вычислив приближенные значения ,
6. Сравнить полученные значения , и . Сделать выводы об эффективности фильтра Калмана.

Примечание. Значение дисперсий и постоянны на всем интервале времени. Переменная принимает значения соответственно .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | Зависимость для вычисления вектора | Зависимость для вычисления вектора |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  | 2 |  |  | 0.1 | 100 |
| 2 |  |  | 1 |  |  | 0.15 | 100 |
| 3 |  | 3 | 2 |  |  | 0.1 | 100 |
| 4 |  |  | 1.5 |  |  | 0.17 | 100 |
| 5 | +3) | 4 | 2 |  |  | 0.1 | 100 |
| 6 | - |  | 3 |  |  | 0.15 | 100 |
| 7 |  |  | -2 |  |  | 0.18 | 100 |
| 8 |  | 2 | 0 |  |  | 0.1 | 100 |
| 9 |  |  | 1.7 |  |  | 0.2 | 100 |
| 10 | 0.2 |  | 0 |  |  | 0.12 | 100 |
| 11 | 0.1ln |  | 1 |  |  | 0.25 | 100 |
| 12 | 0.1 |  | 3 |  |  | 0.15 | 100 |
| 13 |  |  | -2 |  |  | 0.1 | 100 |
| 14 |  |  | -4 |  |  | 0.3 | 100 |
| 15 |  |  | 1.5 |  |  | 0.12 | 100 |
| 16 | ln |  | 2.5 |  |  | 0.17 | 100 |
| 17 | 0.1 |  | 1 |  |  | 0.15 | 100 |
| 18 | 0.5 |  | 0 |  |  | 0.14 | 100 |
| 19 | - | 5 | 0 |  |  | 0.2 | 100 |
| 20 | 0.8 |  | 2 |  |  | 0.25 | 100 |
| 21 |  |  | -1 |  |  | 0.19 | 100 |
| 22 |  | 2 | 0 |  |  | 0.1 | 100 |
| 23 |  |  | 2 |  |  | 0.15 | 100 |
| 24 |  |  | 3 |  |  | 0.2 | 100 |
| 25 | 0.5 |  | 1 |  |  | 0.2 | 100 |
| 26 |  |  | -3 |  |  | 0.3 | 100 |
| 27 |  | - | 2 |  |  | 0.2 | 100 |

### Содержание отчета

1. Постановка задачи (конкретный вариант).
2. Расчетный алгоритм.
3. Блок-схема программы.
4. Текст программы.
5. Результат выполнения программы.
6. Краткие выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Принципиальное отличие задач, решаемых с помощью фильтра Калмана, от задач, решаемых методом максимального правдоподобия и методом Байеса.
2. Основные допущения, принимаемые при использовании линейного фильтра Калмана.
3. Какие вероятностные характеристики системы уравнений оценивают с помощью фильтра Калмана?
4. Какая априорная информация нужна для фильтра Калмана?
5. Какая функция условной плотности вероятности используется при выводе уравнения фильтра Калмана?
6. От каких фактов данные нужны для вычисления по уравнениям линейного алгоритма фильтра Калмана?